

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático



Prueba de selección 7 de junio de 2014

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

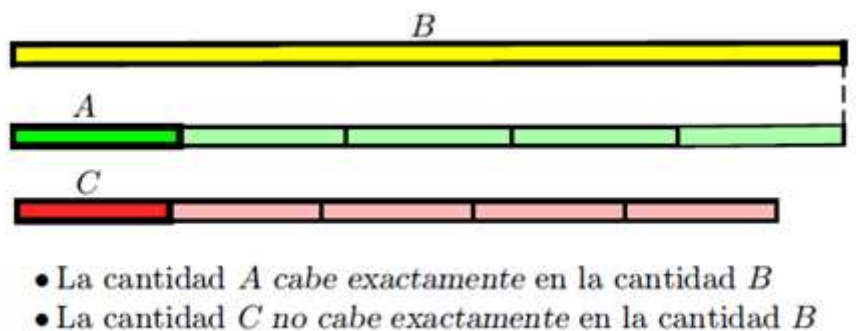
- A través de tu colegio o instituto.
- A través de la *Olimpiada Matemática*.
- A través de otros medios. Indícalo: _____

Tienes hora y media para los tres primeros (de 10 a 11:30) y una hora para los dos últimos (de 12 a 13). De 11:30 a 12, media hora para almorzar. Así dedica unos treinta minutos por problema.

Te deseamos mucho éxito.

1. DIVISORES

Diremos que una cantidad A *cabe exactamente* en otra cantidad B si B se puede obtener como suma de varias veces la cantidad A . Así, por ejemplo, 3 *cabe exactamente* en 12 porque 12 es cuatro veces 3, mientras que 3 *no cabe exactamente* en 7, porque 7 es dos veces 3 y un poco más. Del mismo modo, $1/2$ *cabe exactamente* en 5, porque 5 son diez mitades, mientras que $1/2$ *no cabe exactamente* en $3/4$, porque $3/4$ es una mitad y un poco más.



a) Di una cantidad, más pequeña que $3/5$, que *quepa exactamente* en $3/5$, y otra, más pequeña que $8/3$, que *quepa exactamente* en $8/3$.

b) ¿Cuál es la cantidad más grande, pero más pequeña que $8/3$, que *cabe exactamente* en $8/3$?

c) ¿Cuál es la cantidad más grande, pero más pequeña que $3/5$, que *cabe exactamente* en $3/5$?

d) Di la cantidad más grande que *cabe exactamente* y a la vez en $3/4$ y $5/6$.

(Continúa detrás)

e) Di la cantidad más grande que *cabe exactamente* y a la vez en $9/4$ y $15/2$.

f) Dadas dos fracciones cualesquiera, a/b y c/d , di un método general para encontrar la cantidad más grande que *cabe exactamente* y a la vez en esas dos fracciones.

c) Si la caja tiene 18 monedas, ¿quién puede saber cuántas monedas tienen los demás? Explica tu respuesta.

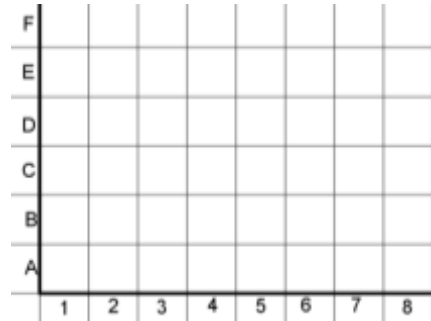
d) ¿Cuál es el mínimo número de monedas que debe tener la caja para que haya una forma de repartir las monedas de manera que nadie pueda saber, mirando sólo sus monedas, cuántas monedas tienen todos los demás? Explica tu respuesta.

3. EL JUEGO DE LOS CUADRADOS

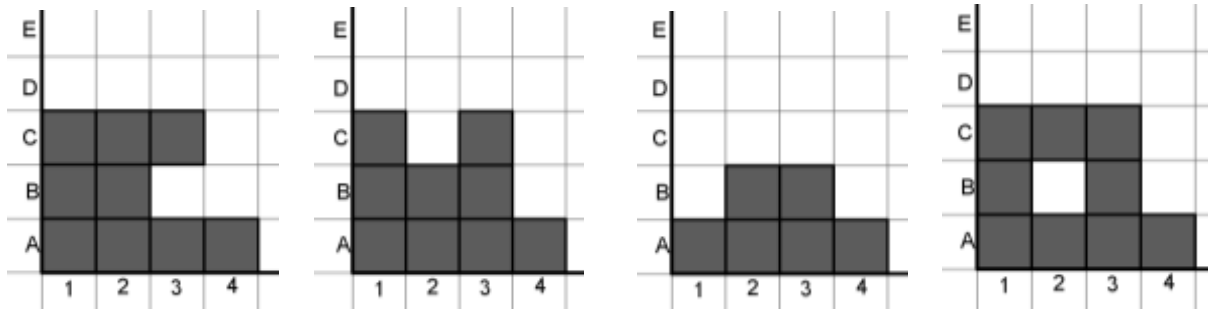


Enrique y Celia se entretienen coloreando cuadrados en una cuadrícula, como la que ves en la figura de manera que todas las figuras que se formen deben respetar las siguientes reglas:

1. Las filas de abajo no pueden ser más cortas que las que están encima de ellas.
2. Las columnas de la izquierda no pueden ser más bajas que las que están a su derecha.
3. Una nueva fila debe comenzar siempre en la casilla de la izquierda y una nueva columna en la casilla de más abajo. Además, no pueden quedar cuadraditos sin colorear entre cuadraditos coloreados.



Las siguientes figuras **no** son válidas pues incumplen alguna de las reglas:

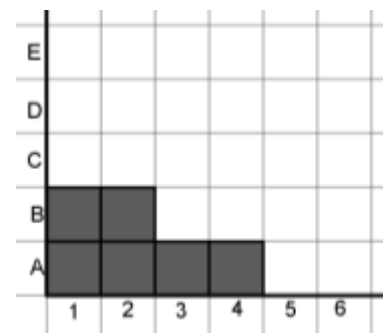


Cuando empiezan un juego, Celia debe colorear el cuadradito A1. A continuación Enrique puede colorear el A2 o el B1.

Ahora Celia puede colorear el cuadradito que quiera siempre que cumpla las reglas del juego. Después coloreará Enrique, etc.

1. ¿Podrías dibujar todas las figuras que están hechas con tres cuadraditos exactamente?

2. Observa la siguiente figura y, utilizando la información que te hemos dado, ¿qué figuras podemos obtener a partir de ella, que tengan un cuadradito más?



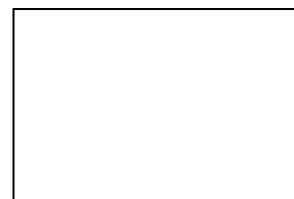
(Continúa detrás)

3. ¿Cuántas figuras hay formadas por cuatro cuadraditos? Explica razonadamente cómo lo obtienes.

4. ¿Cuántas figuras hay formadas por seis cuadraditos? Explica razonadamente cómo lo obtienes.

5. Ahora trata de explicarnos cuántas figuras, que tengan exactamente **tres** filas, pueden formarse con 10 cuadraditos.

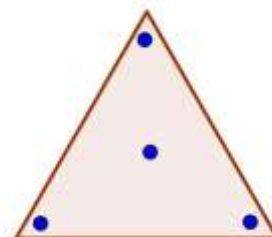
4. CRISS-CROSS



El juego del Criss-Cross se juega entre dos jugadores y vamos a ver diversas variantes. En un tablero hay dibujados inicialmente algunos puntos y los jugadores juegan por turno.

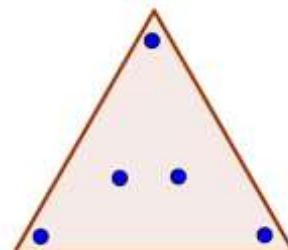
Una jugada correcta consiste en unir dos de los puntos mediante **un segmento sin pasar por otros puntos intermedios ni cortar otros segmentos ya dibujados anteriormente**. Los puntos utilizados para unir segmentos pueden volver a utilizarse en turnos posteriores para formar nuevos segmentos que no se hayan trazado previamente. El ganador es el último jugador que puede hacer una jugada correcta.

- a) En el primer tablero que estudiamos están dibujados tres puntos cerca de los vértices de un triángulo equilátero y un punto en el interior del triángulo.
¿Cuántas jugadas diferentes puede hacer el primer jugador en el tablero 1 en su primer turno? ¿Ganará el primer o el segundo jugador? Explica tu respuesta.



Tablero 1

- b) En el segundo tablero que estudiamos están dibujados tres puntos cerca de los vértices de un triángulo equilátero y dos puntos en el interior del triángulo.
¿Cuántas jugadas diferentes puede hacer el primer jugador en el Tablero 2 en su primer turno? ¿Ganará el primer o el segundo jugador? Explica tu respuesta.

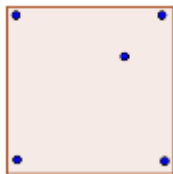
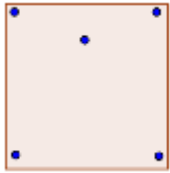
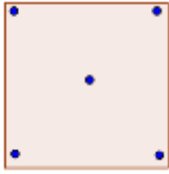


Tablero 2

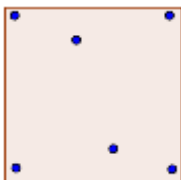
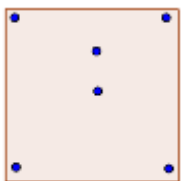
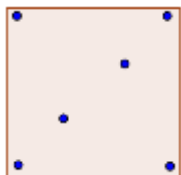
- c) Explica por qué cualquier partida en el Tablero 2 siempre tiene el mismo número de jugadas.

(Continúa detrás)

- d) Cambiamos ahora la forma del tablero de Criss-Cross. Ahora el tablero es un cuadrado y tiene cuatro puntos dibujados cerca de las esquinas y un punto adicional en el interior del cuadrado. Explica razonadamente cómo predecir, en cada uno de los casos de los siguientes tableros, cuál de los dos jugadores ganará.



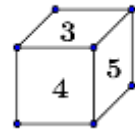
- e) Pon ahora dos puntos adicionales en el interior de un tablero de Criss-Cross cuadrado. Explica razonadamente cómo predecir, en cada uno de los casos de los siguientes tableros, cuál de los dos jugadores ganará.



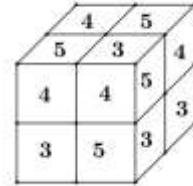
5. CUBOS



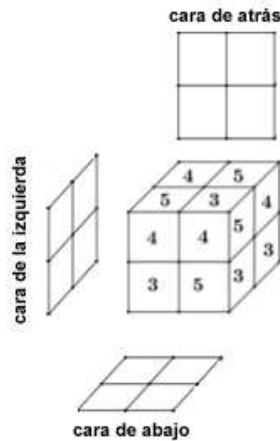
En un cubo ponemos en sus caras dos treses, dos cuatros y dos cincos, **de modo que dos caras opuestas tienen el mismo número**, por ejemplo el cubo de la figura de la derecha, en el que la cara opuesta al 3 tiene un 3, etc.



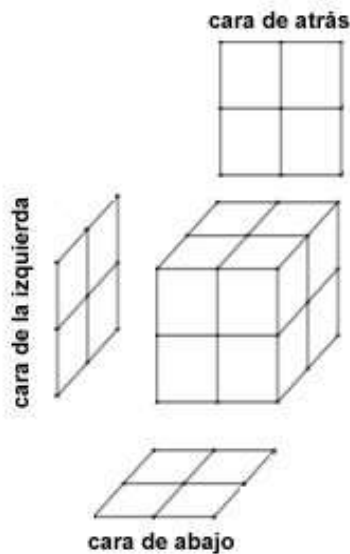
- a) Con 8 cubitos como éste, formamos un cubo más grande, por ejemplo, el que observas a tu derecha.



Indica una posibilidad para los números que aparecerían en las caras que no se ven, completando los siguientes recuadros:



- b) ¿Se pueden tener todas las caras con los 4 números iguales? Si no se puede, da una explicación de por qué no se puede y, si se puede, dibújala.



(Continúa detrás)

- c) Explica con detalle por qué no podríamos tener los números colocados como muestra la representación siguiente de un cubo construido con 8 cubos como los de este ejercicio

		3	5					
		4	3					
3	3	5	4	5	3	4	5	
4	5	3	3	4	3	5	4	
		4	5					
		5	4					

A cada cara le asignamos la suma de todos los números que hay en la cara. Así en el cubo del ejemplo inicial, a la cara de arriba le asignamos el 17, a la frontal el 16 y a la de la derecha el 15.

- d) Para el primer cubo dibujado, calcula cuál es el número que le corresponde a la cara de abajo, a la de detrás y a la de la izquierda con los valores que has indicado en el apartado a). ¿Cuál es la suma de los 6 números asignados a las 6 caras?
- e) ¿Se pueden colocar los cubos de manera que los números asignados a cada cara sean 6 números consecutivos?