

# PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

## **Estímulo del talento matemático**



**Prueba de selección 6 de junio de 2015**

Nombre:.....

Apellidos:.....

Fecha de nacimiento:.....

---

### **Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar**

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

**No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.**

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- A través de tu colegio o instituto.
- A través de la *Olimpiada Matemática*.
- A través de otros medios. Indícalo: \_\_\_\_\_

**Tienes HORA Y MEDIA para los tres primeros (de 10 a 11:30) y UNA HORA para los dos últimos (de 12 a 13). De 11:30 a 12, MEDIA HORA PARA ALMORZAR. Así dedica unos treinta minutos por problema.**

**Te deseamos mucho éxito.**

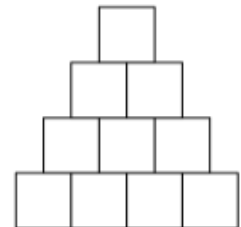




## 1. TORRES

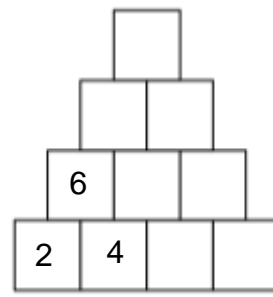
Tenemos una torre que está formada por 4 cuadrados en la base (primer piso), en el segundo piso hay 3 cuadrados, en el tercero 2 y en el último 1, como indica la figura.

En cada torre vamos a colocar unos números de acuerdo con las siguientes reglas:



1. Se empieza a rellenar por la casilla de la izquierda del primer piso y se pone un número, el que quieras.
2. A continuación se completa el primer piso de manera que en cada casilla se pone el doble del anterior.
3. Cuando se acaba el primer piso se empieza a rellenar el segundo, de modo que en cada casilla se pone la suma de las dos que tiene debajo.
4. Y se sigue así con todos los pisos hasta completar la torre.

- a) En la torre que te ponemos a continuación hemos elegido el primer número el 2. Rellena todas las casillas de acuerdo con las reglas anteriores.



- b) Si sumas todos los números que hay en la torre, ¿se tiene un cuadrado perfecto? El 144 es un cuadrado perfecto porque  $144=12^2$ , pero 32 no es cuadrado perfecto porque no hay ningún número natural que elevado al cuadrado de 32.

(Continúa detrás)

c) ¿Cuál es el menor número por el que tienes que empezar para que la suma de todos los números de la torre sea un cuadrado perfecto?

d) Ahora vamos a trabajar con una torre de 5 pisos, ¿Cuál es el menor número por el que tienes que empezar para que la suma de todos los números sea un cuadrado perfecto?

e) ¿Has observado que el último piso es siempre una potencia de 3 por un número? ¿Qué número? ¿Sabrías justificar por qué?

## 2. TARJETAS NUMERADAS



Álex y Bea tienen 10 tarjetas numeradas con los números 1, 2, 3,... 10. Juegan a un juego en el que uno de ellos debe usar **tres de las tarjetas** para obtener la suma que diga su compañero.

*Por ejemplo, si Álex dice: 6, entonces Bea debe encontrar tres tarjetas que sumen 6. En este caso, debería escoger las tarjetas la 1, 2, 3.*

- a) Bea dice: 7. ¿Qué tarjetas puede escoger Álex?
- b) Quitamos cinco de las diez tarjetas y Álex dice: 8. Bea se da cuenta entonces de que puede sumar el número 8 con tres tarjetas de dos formas distintas. ¿Qué tarjetas habíamos quitado al principio?
- c) Quitamos una de las 10 tarjetas y Bea dice: 10. Álex se da cuenta entonces de que puede sumar el número 10 con tres tarjetas de una sola forma. ¿Qué tarjeta habíamos quitado al principio?

(Continúa detrás)

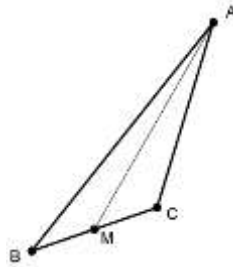
**d)** Quitamos una tarjeta y Álex dice: 25. Bea no puede encontrar ninguna combinación de tres tarjetas para que sume 25. ¿Qué tarjeta habíamos quitado al principio?

**e)** Quitamos una de las 10 tarjetas y Bea dice: 16. Álex se da cuenta entonces de que puede sumar el número 16 de seis formas distintas. ¿Qué tarjeta hemos quitado?



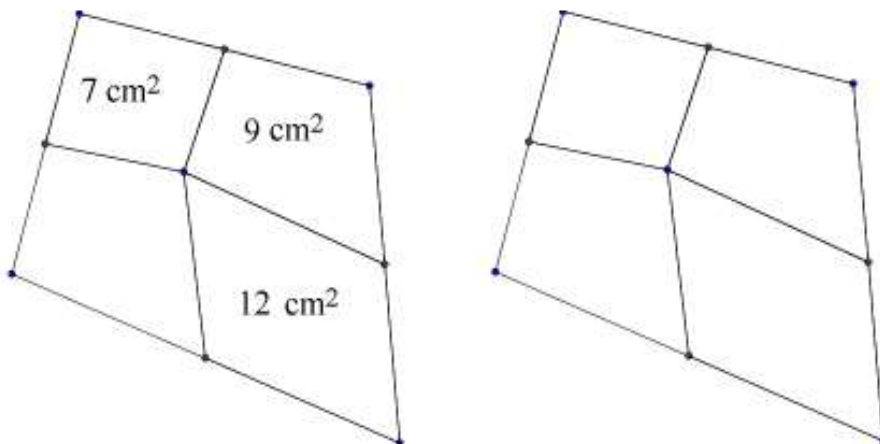
### 3. CUADRILATEROS Y TRIÁNGULOS

- a) Consideremos un triángulo cualquiera ABC y en el lado BC su punto medio M. Dividimos el triángulo en otros dos AMB y ACM, como se ve en la figura. Si al área de AMB es  $4 \text{ cm}^2$ , ¿cuál es el área del otro triángulo ACM? Justifica la respuesta



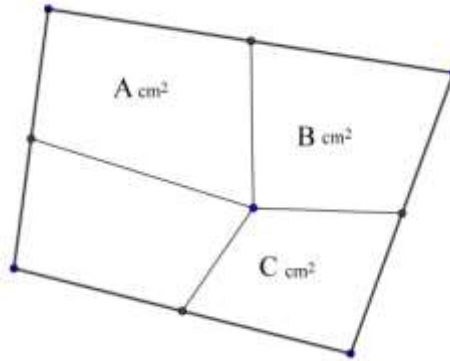
- b) Consideremos ahora un cuadrilátero como el de la figura. Si escogemos en él un punto interior y lo unimos con los puntos medios de los cuatro lados, el cuadrilátero inicial queda descompuesto en cuatro cuadriláteros más pequeños. Si las áreas de tres de estos cuadriláteros consecutivos son  $7 \text{ cm}^2$ ,  $9 \text{ cm}^2$  y  $12 \text{ cm}^2$ , como se indica en la figura, ¿cuál es el área del cuarto cuadrilátero de dicha descomposición?

Nota: Las áreas no están dibujadas a escala.



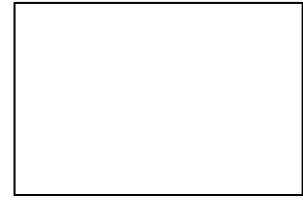
(Continúa detrás)

- c) Ahora te pedimos que generalices. Repite los apartados anteriores con otro cuadrilátero de partida pero indicando las áreas de tres de los cuatro cuadriláteros consecutivos de la descomposición como  $A \text{ cm}^2$ ,  $B \text{ cm}^2$  y  $C \text{ cm}^2$ . Debes indicar con una operación entre  $A$ ,  $B$  y  $C$  cuál crees que sería el área del cuarto cuadrilátero de la descomposición.

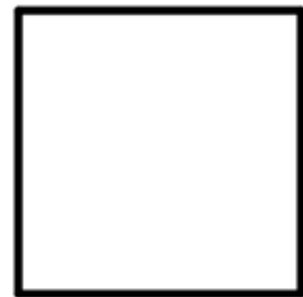
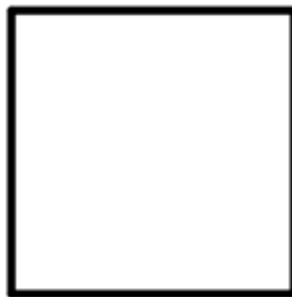
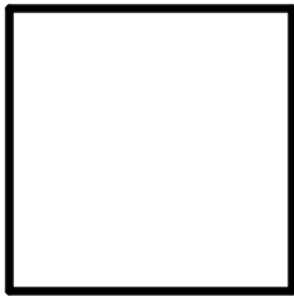




#### 4. DIVIDIENDO CUADRADOS Y HEXÁGONOS



- a) Dado un cuadrado, lo cortamos con dos rectas para dividirlo en partes. ¿De cuántas maneras diferentes podemos hacerlo para obtener tres partes iguales en forma y tamaño? ¿Y para obtener cuatro partes iguales? Razona las respuestas.

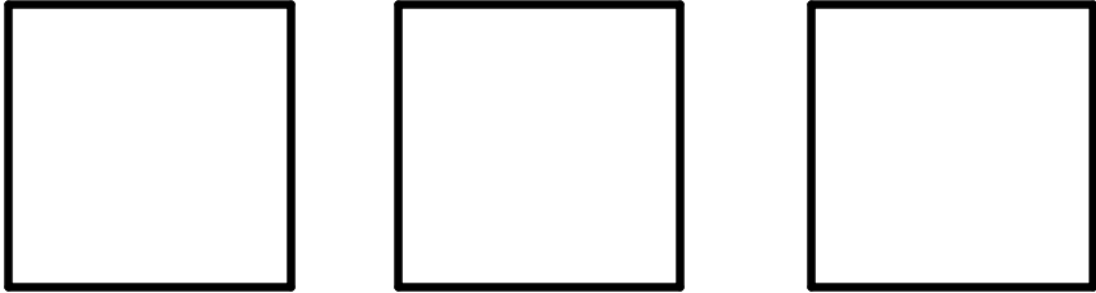


- b) Divide un hexágono regular en 8 partes iguales, en forma y tamaño. Si la longitud del lado del hexágono es de 10 cm, encuentra la longitud de los lados de cada una de las partes en que se ha dividido el hexágono.



(Continúa detrás)

- c) Dividir un cuadrado en 4, en 9 o en 16 cuadrados es sencillo. ¿Sabrías dividir un cuadrado en 8 cuadrados (no necesariamente iguales)? ¿Y en 13 cuadrados?



- d) Para cualquier número  $n$  mayor que 5 es posible dividir un cuadrado en  $n$  cuadrados (no hace falta que sean iguales). Intenta explicar cómo lo harías según el valor de  $n$ .



## 5. JUEGO CON CARTAS

Aina y Joan están jugando a un "juego de divisibilidad" con diez cartas numeradas del 0 al 9. Colocan por turno una carta en la mesa, siempre a la derecha de la carta colocada anteriormente por su compañero. El objetivo del juego consiste en ir consiguiendo que:

Después de colocar la segunda carta, el número de dos cifras resultante tiene que ser divisible por 2.

Después de colocar la tercera carta, el número de tres cifras resultante tiene que ser divisible por 3.

Después de colocar la cuarta carta, el número de cuatro cifras resultante tiene que ser divisible por 4.

Y así sucesivamente. Ellos siguen colocando cartas hasta que uno de los dos no puede poner otra que cumpla las normas del juego.

Tenemos aquí un ejemplo de juego:

Aina pone el 5. Joan coloca el 8 para hacer 58, que es múltiplo de 2. Aina pone luego el 2 para tener 582, que es múltiplo de 3. Joan coloca entonces el 0 y tenemos 5820, que es un múltiplo de 4. Aina tendría ahora que escoger 1,3,4,6,7 ó 9 para hacer un múltiplo de 5. Como no puede, Joan gana.

a) En esta partida ha comenzado Aina y han puesto las cartas 540. ¿Qué número o números pueden ponerse a continuación? ¿Quién ganaría esta partida? Justifica tus respuestas.

b) Ahora ha comenzado a jugar Joan y han puesto las cartas 28. ¿Qué número o números pueden ponerse a continuación? ¿Quién ganaría esta partida? Justifica tus respuestas.

**(Continúa detrás)**

Ahora deciden jugar juntos para intentar formar el número más largo posible, siempre cumpliendo las reglas del juego. Rápidamente llegan hasta el número de cinco cifras 12365.

c) ¿Piensas que podrían hacer este número más largo con las cartas que les quedan? ¿Cuándo tendrían que parar?

d) ¿Sería posible usar las diez cartas para formar un número de 10 cifras que cumpla las condiciones del juego? Razona tu respuesta.