PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección
4 de junio de 2016

DNI:……………………………… Nombre:………………………………………………
Apellidos:…………………………………………………………………………………
Fecha y lugar de nacimiento:……………………………………………………………
Teléfonos:…………………………………………………………………………………

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar
DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA (1ª Parte: 1h 30m / 2ª Parte: 1h).

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, los caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos **TODOS** los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones incompletas de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- ☐ A través de tu colegio.
- ☐ A través de la *Olimpiada Matemática*.
- ☐ A través del *Open Matemático.*
- ☐ A través de otros medios. Indícalos: ………………………………………………..

Tienes dos horas y media de prueba en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30-40 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
GOBIERNO DE ESPAÑA — MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD
FECYT — FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

1. EN LA PAPELERÍA

En una papelería venden estuches de tres tamaños: **pequeños, medianos y grandes**. Los precios de los estuches son números enteros positivos, es decir, no tienen decimales y están ordenados de acuerdo con el tamaño de los estuches.

Por ejemplo, unos posibles precios serían que un estuche pequeño costara 5 euros, uno mediano 8 euros y uno grande 9 euros. Y ejemplos de precios que **no** valen son: que un estuche cualquiera cueste 8,75 euros o que uno pequeño cueste 6 euros si el mediano cuesta 4 euros.

María, Ana y Elena fueron ayer a la papelería y compraron 9 estuches pequeños, 6 medianos y 8 grandes para regalar a toda su clase.

a) ¿Cuánto les costarían los estuches si los precios son 2, 4 y 5 euros? ¿Y si los precios son cantidades cualesquiera? Intenta dar una expresión general para cualquier precio de los estuches de la manera que tú consideres más oportuna.

Ahora no sabemos cuánto cuesta cada estuche pero, cuando recibieron la cuenta, se produjo la siguiente conversación:

María dijo: *mira, el precio total es un número par.*
Ana dijo: *y también es un múltiplo de tres*.
Elena dijo: *entre las tres tenemos que pagar menos de 90 euros.*

b) ¿Puede ser que el estuche pequeño cueste 3 euros?

c) ¿Puede ser que el estuche grande cueste 5 euros?

(**Continúa detrás**)

d) ¿Puede ser que el estuche mediano cueste 10 euros?

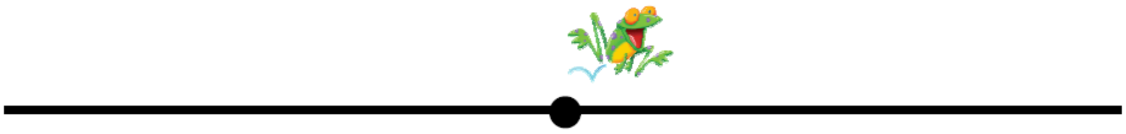
e) El precio de un estuche pequeño no puede ser cualquier número.
¿Qué condición tiene que cumplir el precio de un estuche pequeño?

f) El precio de un estuche grande tampoco puede ser cualquier número.
¿Qué condición tiene que cumplir el precio de un estuche grande?

g) ¿Puede haber un estuche grande que cueste 9 euros?

h) ¿Podrías decir exactamente cuánto cuesta cada estuche?

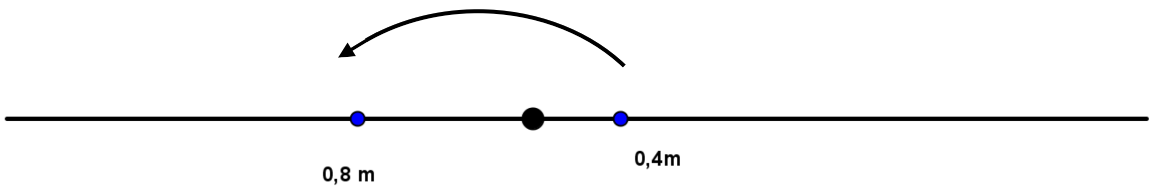
2. LA RANA SALTARINA



En esta línea recta hay una rana que salta, alternadamente hacia la derecha y hacia la izquierda del punto negro, sin caer nunca en él. Lo hace de la siguiente forma:

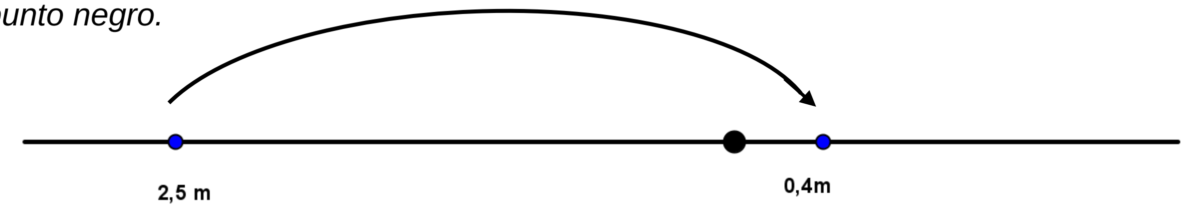
- Si la rana se encuentra a una distancia ***d*** inferior o igual a 1 metro del punto negro, tras dar su siguiente salto estará sobre la recta al doble de esa distancia del punto negro, o sea, a ***2d*** metros del punto negro, pero en el lado opuesto.

Por ejemplo, si la rana está a la derecha del punto negro a una distancia $d = \frac{2}{5} = 0{,}4$ *metros, dará el salto a la izquierda para caer a una distancia* $2d = \frac{4}{5} = 0{,}8$ *metros del punto negro.*



- Si la rana se encuentra a una distancia ***d*** superior a un metro del punto negro, tras dar su siguiente salto estará sobre la recta a una distancia igual a ***1/d*** del punto negro, pero en el lado opuesto.

Por ejemplo, si la rana está a la izquierda del punto negro a una distancia $d = \frac{5}{2} = 2{,}5$ *metros, dará el salto a la derecha para caer a una distancia* $\frac{1}{d} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ *metros del punto negro.*



Responde a las siguientes preguntas y en todas tus respuestas indica a qué distancia y en qué lado del punto negro se encontrará la rana:

(Continúa detrás)

a) Si inicialmente estaba a la izquierda del punto negro y a una distancia de 0,05 metros, ¿dónde se encontrará exactamente tras dar dos saltos?

b) ¿Y dónde se encontrará exactamente tras dar cinco saltos?

c) ¿Y tras dar diez saltos?

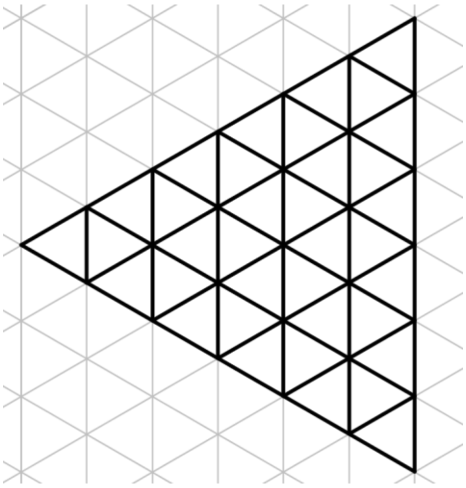
d) No te asustes, piensa un poco: ¿Y tras 2016 saltos? Explica tu respuesta.

e) Ahora queremos que nos digas en qué lado del punto negro y a qué distancia de él empezó la rana si después de **tres** saltos la rana se encuentra a la derecha y a 0,8 m del punto negro. **Indica razonadamente todas las soluciones posibles.**

3. TRIÁNGULOS CON TRIÁNGULOS

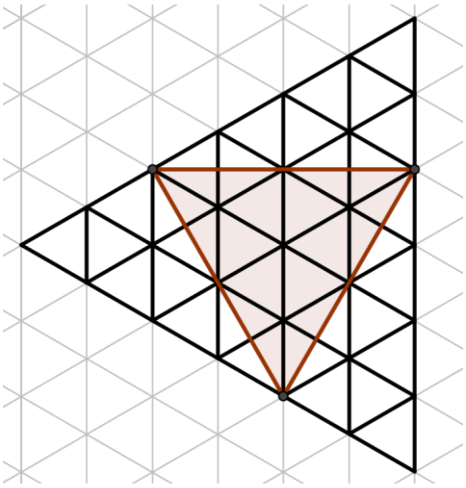
Un triángulo equilátero de área 36 cm^2, está dividido en 36 triangulitos de 1 cm^2 cada uno, como en las figuras siguientes.

a) Dibuja sobre esta figura un triángulo (no necesariamente equilátero) de área 8 cm^2.



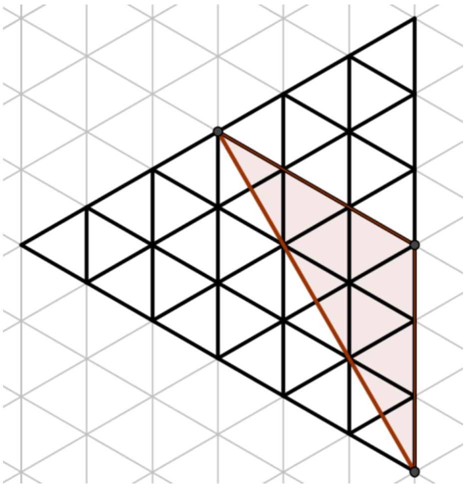
Calcula **razonadamente,** en cada caso, el área de las figuras sombreadas, **explicando cómo lo has hecho:**

b)

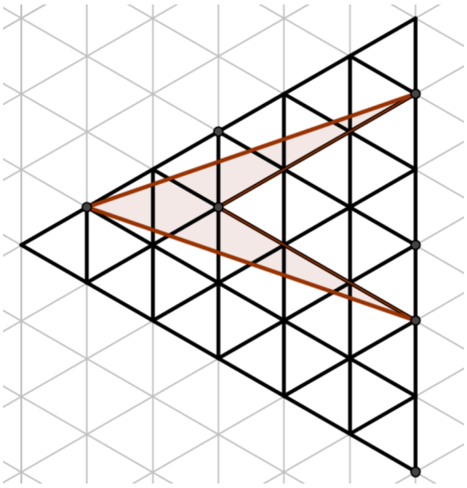


(Continúa detrás)

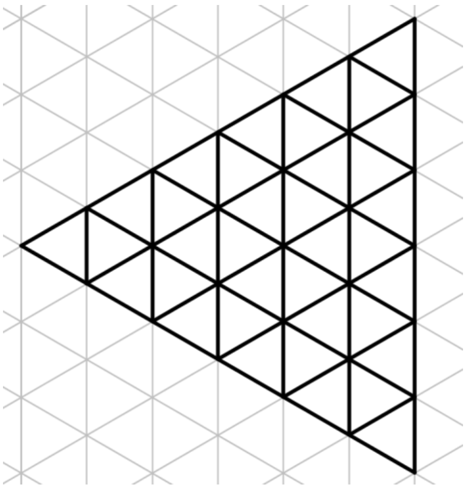
c)

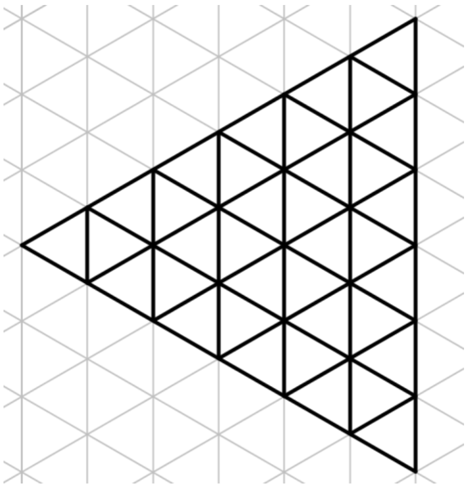


d)

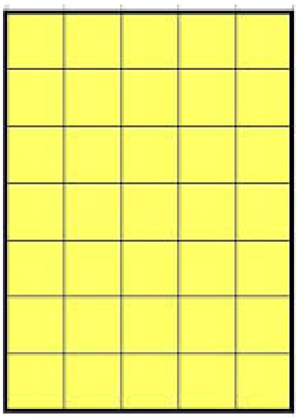


Más triángulos, por si necesitas practicar:





4. RECTÁNGULOS Y BLOQUES



Carlos, Diana y Elena ponen fichas cuadradas sobre una mesa formando rectángulos, cuyos lados quedan orientados a los cuatro puntos cardinales. Tienes un ejemplo en la figura de la derecha.

a) Carlos, Diana y Elena han construido un rectángulo, distinto y mayor que el de la figura. Una vez hecho, Carlos se lleva a su bolsillo las 7 fichas del rectángulo que estaban en el lado sur. Después, del nuevo rectángulo que ha quedado con las fichas restantes, Diana suprime las fichas del lado este, que son 10. Si a continuación Elena quiere recoger las fichas del lado norte ¿cuántas fichas recoge Elena?

Y después de que Elena las recoja, ¿cuántas fichas quedarán sobre la mesa?

b) ¿Crees que si se empieza con otros rectángulos, de manera que se cambien los números 7 y 10 por otros números, siempre se podrá saber cuántas fichas recoge Elena y cuántas quedan al final sobre la mesa?

c) Ahora Carlos, Diana y Elena construyen bloques con un montón de pequeños cubos, como en la figura de la derecha.

Imagina que Carlos, Diana y Elena construyen un bloque distinto y más grande que el de la figura. Se cumple también que ninguna de las tres caras del bloque puede tener ni su base ni su altura formada por un solo cubo.

Carlos separa todos los cubos de la cara frontal y se da cuenta que son 77.

Después Diana quita todos los cubos que quedan en la cara de la derecha y son 55.

Si a continuación Elena quiere eliminar todos los cubos que quedan en la cara superior, ¿puedes deducir cuántos serán?

(**Continúa detrás**)

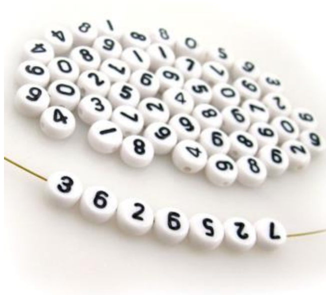
¿Cuántos cubos quedarán en el bloque formado por los cubos restantes después de que Carlos, Diana y Elena supriman los cubos indicados?

d) Para otro bloque Carlos dice que ha sacado un cierto número de cubos de la cara frontal y después Diana dice otro número para la cara de la derecha. Enseguida Elena dice "estos números de cubos que decís no son posibles". Da un ejemplo de números que erróneamente, puedan haber dicho Carlos y Diana pero que no puedan ser ciertos y explica las razones que te llevan a tu respuesta.

e) En otros casos, para ciertas dimensiones del bloque inicial, no es posible deducir con seguridad cuántos cubos quedan en la cara superior sabiendo los que ha quitado Carlos de la cara frontal y los que ha quitado después Diana de la cara de la derecha, ya que se presentan diversas posibilidades. Busca unos números (para sustituir el 77 y el 55 del apartado c) para los cuáles no sea posible, sólo con estos datos, deducir exactamente el número de cubos que quitará Elena después de que lo hagan Carlos y Diana.

5. PULSERAS

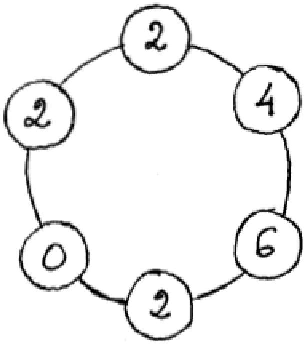
Tienes muchas cuentas, tantas como necesites, numeradas del 0 al 7:



Con ellas vamos a hacer pulseras con las siguientes reglas:

1) Elige dos de ellas para comenzar. Pueden tener el mismo número o un número distinto.
2) Para elegir la tercera cuenta, suma los números de la primera y la segunda. Si te sale menos de 8 elige la cuenta con el número que te ha salido. Si te sale 8 o más, réstale 8 y elige la cuenta con el número que te haya salido de esa última resta.
3) Para elegir la cuarta se hace lo mismo que antes, con la segunda y la tercera cuentas.
4) Continua hasta que se vuelvan a repetir las dos primeras cuentas EN EL MISMO ORDEN en que se pusieron al principio.
5) Estas dos cuentas repetidas no se utilizarán para hacer la pulsera y se devuelven al montón.
6) Con las cuentas que quedan unidas, sin cambiar el orden, se confecciona una pulsera.

Aquí tienes un ejemplo comenzando con 2 y 4:



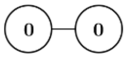
Al repetirse de nuevo el 2 y el 4, este 2 y este 4 se devuelven al montón y, con las cuentas que ya teníamos 2, 4, 6, 2, 0 y 2, se forma una pulsera. Como hay seis cuerdecitas que unen las cuentas, decimos que esta pulsera tiene longitud 6.

Ten en cuenta que, como la pulsera es cerrada se puede comenzar por cualquier lugar. Por ejemplo, la pulsera anterior es la misma que la que comienza por 6 y 2, y la misma que si empezamos por 2 y 2.

a) Dibuja la pulsera comenzando con 0 y 1. ¿Qué longitud tiene? Si comienzas por 5 y 5 ¿se obtiene una pulsera diferente?

(**Continúa detrás**)

b) ¿De cuántas formas distintas se puede empezar la pulsera del apartado a)?

c) Quitando la pulsera 

¿Qué longitud tiene la pulsera más pequeña? ¿Por qué?

d) ¿De cuántas formas diferentes se puede comenzar una pulsera?

e) ¿Cuántas pulseras diferentes se pueden hacer? Dibújalas todas y justifica tu respuesta. No dibujes dos pulseras que, aunque las hayas comenzado con dos cuentas diferentes, sean iguales.