PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

# Estímulo del talento matemático

## Prueba de selección
**3 de junio de 2017**

DNI: ……………………………… Nombre: ……………………………………………

Apellidos: …………………………………………………………………………………

Fecha y lugar de nacimiento: ……………………………………………………………

Teléfonos: …………………………………………………………………………………

---

### Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar
**DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA (1ª Parte: 1h 30m / 2ª Parte: 1h).**

En primer lugar, debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú misma/o el orden que te parezca mejor.

**No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, los caminos que te han llevado a ellas.**

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos **TODOS** los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones incompletas de las tareas propuestas.

Además, tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- ☐ A través de tu colegio.
- ☐ A través de la *Olimpiada Matemática*.
- ☐ A través del *Open Matemático.*
- ☐ A través de otros medios. Indícalos: …………………………………………

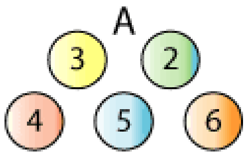
**Tienes dos horas y media de prueba en total**. En la primera parte encontrarás 3 problemas y tendrás 1h 30m. para resolverlos. En la segunda parte, encontrarás 2 problemas y tendrás 1h para resolverlos.

**Te deseamos mucho éxito.**

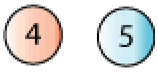
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD
FECYT
FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

## 1. JUEGO CON BOLAS

Tenemos una bolsa **A** de bolas numeradas que empleamos para un juego:




Para jugar, las bolas se mezclan y se eligen dos al azar. Por ejemplo:

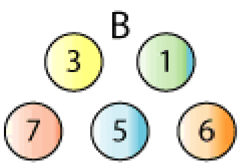


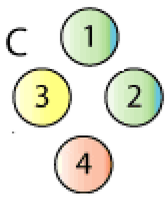

Luego se suman los números de las dos bolas elegidas: 4+5=9

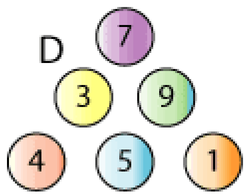
**Si la suma es par, ganas. Si es impar, pierdes.**

**a)** Un juego se dice que es **justo** si el número de parejas que te hacen ganar es el mismo que el número de parejas que te hacen perder. ¿Puedes justificar si el juego con la bolsa A es justo o no?

Tenemos ahora tres nuevas bolsas de bolas: B, C y D:




**b)** Ahora te dejan escoger una de las bolsas B, C o D**.** Explica cuál de las tres bolsas escogerías para que tu posibilidad de ganar sea la mayor posible.

**(Continúa detrás)**

**c)** ¿Crees que podrías construir una bolsa con bolas numeradas que diese lugar a un juego justo? Explica tu respuesta.

**d)** ¿Sería posible construir una bolsa con 10 bolas numeradas que diera lugar a un juego justo? Explica tu respuesta.

## 2. EL PALACIO DE LAS HADAS

Las hadas viven en un palacio que tiene muchísimos pisos numerados así: 1,2,3,4,5…………

Para ir de un piso a otro piso hay que utilizar una varita mágica y en cada piso hay dos varitas mágicas: una es **roja** y la otra es **azul**.

Si tocas la varita mágica roja puedes ir 10 pisos más arriba o 10 pisos más abajo. Por ejemplo, si estás en el piso 37 y tocas la varita roja puedes ir al piso 47 o al piso 27.

También puedes tocar la varita azul. Si tocas la varita azul, puedes subir a otro piso que es el triple del piso que estás más uno. Por ejemplo, si estás en el piso 5 puedes ir al piso 16=3.5+1. También puedes moverte en sentido contrario, por ejemplo, si estás en el piso 13 podrías ir a la 4 porque 13=3.4+1.

**a)** El hada del Bosque vive en el piso 1. ¿Crees que podría llegar al piso 13? ¿Podría ir al piso 40 o al piso 93? ¿Y al piso 57? Si puede llegar a alguno de estos pisos, explica qué varitas ha tocado y en qué orden. Si crees que no puede llegar a alguno de ellos, explica por qué.

**b)** ¿Podrías decir alguna propiedad que cumplan los números de todos los pisos a los que puede llegar el hada del Bosque?

**(Continúa detrás)**

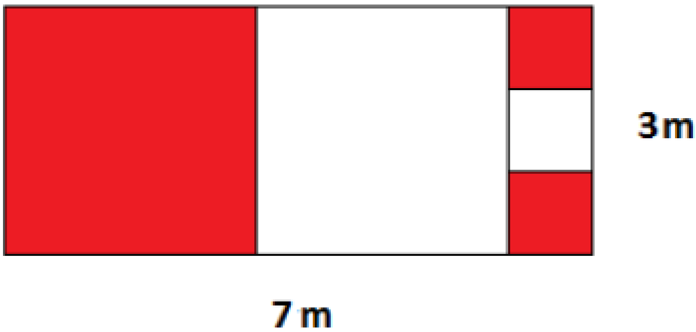
**c)** El hada de la Luna vive en la planta 2. Describe cómo puede llegar el hada de la Luna a la planta 57.

.

**d)** El hada del Agua vive en el piso 18. Utilizando la varita roja y la varita azul, ¿podría llegar el hada del Agua al piso 5?

**e)** ¿Coinciden dos de estas tres hadas en algún piso? Si piensas que **SÍ** dinos el piso, cuáles son las hadas que coinciden en él y como llegarían. Si piensas que **NO** escribe una justificación.

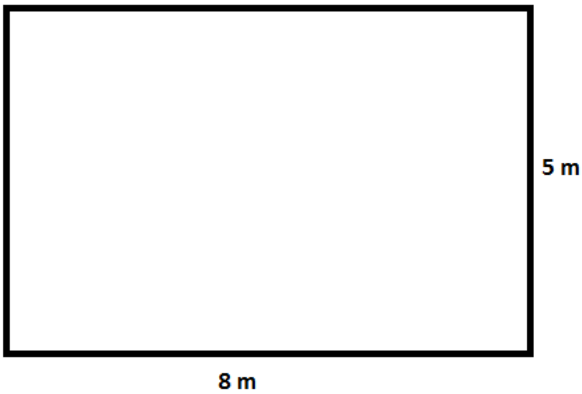
## 3. EMBALDOSANDO UNA PARED



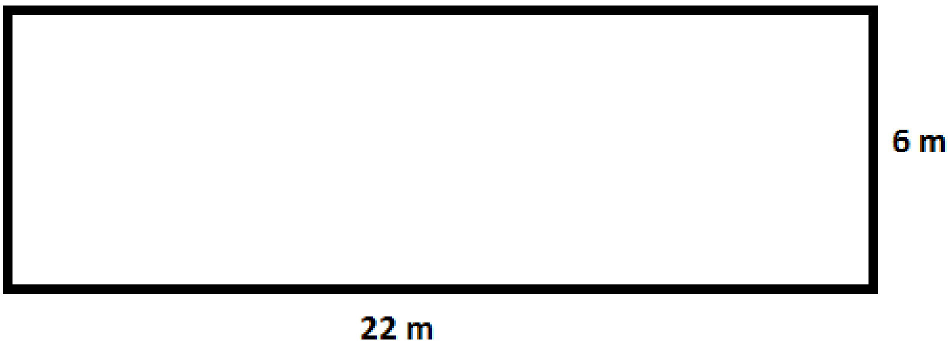

Queremos embaldosar una pared rectangular de 3 metros por 7 metros, utilizando exclusivamente baldosas **cuadradas** cuyos lados sean longitudes **enteras** (es decir, la longitud del lado sólo puede ser 1, 2, 3, 4, etc.). Las longitudes de las baldosas no tienen por qué ser necesariamente iguales y queremos utilizar el **mínimo** número posible de baldosas para embaldosar la pared.

El número **mínimo** total en este caso sería de 5 baldosas cuadradas ya que necesitaríamos 2 de lado 3 $m$. y 3 de lado 1 $m$. Un posible diseño sería el que se muestra en la figura de arriba, aunque podrían encontrarse otros cambiando la disposición de esas 5 baldosas.

**a)** Si ahora queremos embaldosar una pared rectangular de 8 m. por 5 m. con el mismo criterio, ¿cuántas baldosas cuadradas necesitarías en total y de qué tamaño? **Dibuja algún diseño con ellas como ejemplo.**

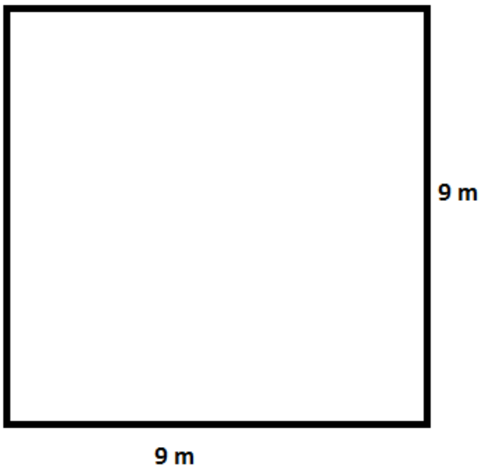


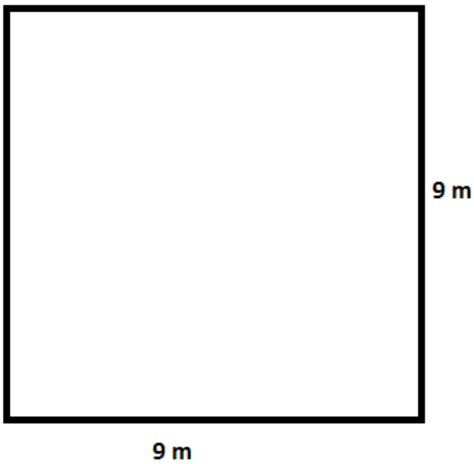

**b)** Ahora cambiamos un poco las condiciones y sólo tenemos baldosas cuadradas de lados 2 $m$, 4 $m$. $y$ 6$m$, ¿cuántas baldosas necesitarías en total y de qué tamaños para embaldosar una pared de 22 $m$. por 6 $m$.? **Dibuja algún diseño con el número de baldosas encontrado.**




**(Continúa detrás)**

**c)** Si ahora la pared es cuadrada de lado 9 $m$. y sólo disponemos de baldosas cuadradas de lado 1, 2, 4, 5 $y$ 7 $m$. podemos encontrar el número mínimo de dos formas distintas utilizando baldosas distintas en cada posibilidad (podrían repetirse algunas baldosas pero no todas). **Encuéntra estas dos posibilidades distintas y realiza un diseño con cada una.**




**d)** Ahora podemos usar baldosas cuadradas cuyo lado sea un número entero o un número con un único decimal que sea el 5. Por ejemplo: 1 , 1,5 , 2 , 2,5 , … , 16 , 16,5 , etc. Si disponemos de una pared de 371,25 m$^2$, y sabemos que la mayor baldosa que cabe en la pared es una de 16,5 $m$. de lado, **¿cuál sería la mínima distribución de baldosas que permitirían embaldosar esta pared?**

## 4. INTERCAMBIO DE CIFRAS

a) Escribe ordenadamente todos los números que se pueden obtener con todas las cifras del número 123. Fíjate en cada uno de ellos y señala los que con un simple intercambio de dos cifras permiten obtener el número 123. ¿Cuántos son?

b) Escribe ordenadamente todos los números que se pueden obtener con todas las cifras del número 1234. ¿Cuántos son? Fíjate en cada uno de ellos y señala los que con un simple intercambio de dos cifras permiten obtener el número 1234. ¿Cuántos son?

(**Continúa detrás**)

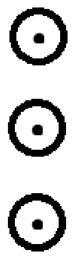
c) ¿Realmente necesitas escribir todos los números de antes para poder responder a la última cuestión de los dos apartados anteriores? Sin escribirlos todos, ¿podrías decir cuántos números se podrán obtener con todas las cifras del número 12345? ¿Y cuántos de ellos permiten con un simple cambio de dos cifras obtener el número 12345? Explica tu respuesta.

d) ¿Cuáles de los números del apartado b) son los que requieren exactamente dos intercambios de dos cifras para obtener el número 1234? ¿Y tres de dichos intercambios? ¿Alguno de ellos requiere más de tres intercambios?

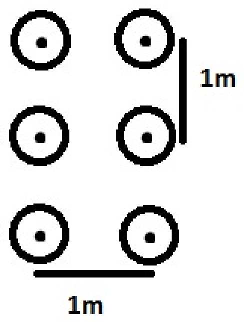
## 5. SEMBRANDO SEMILLAS

Un agricultor se dispone a sembrar semillas de patatas en su terreno.

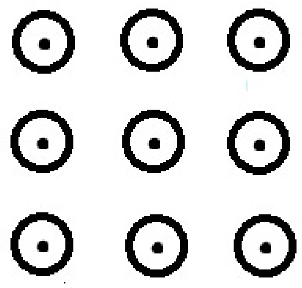
**1.** El primer día, el agricultor siembra tres semillas en línea recta separadas 1 metro entre cada dos consecutivas (como se indica en la figura de la derecha).



El segundo día, vuelve a sembrar otras tres semillas en una línea paralela a la anterior a distancia 1 metro y también a distancia 1 metro entre cada nueva semilla.




Tras la siembra del tercer día, el campo queda de la siguiente forma:



a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

(**Continúa detrás**)

c) Llamamos orden de una semilla al número de cuadrados que tienen alguno de sus vértices en dicha semilla. ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?

d) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

**2.** El agricultor sigue cultivando tres semillas cada día con la misma distribución anterior. Tras la siembra del cuarto día,

a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

c) ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?

d) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

**3**. Si han pasado 100 días, responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

(**Continúa detrás**)

b) ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

c) ¿Cuál es el orden de cada una de estas semillas?

d) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

**4**. Si han pasado "n" días (n representa cualquier valor de los días de siembra), responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

c) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?