PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
Estímulo del talento matemático
Prueba de selección
1 de junio de 2019

Nombre: ____

Apellidos: ____

Fecha de nacimiento (día/mes/año): _____ / ____ /__________

Teléfonos (madre, padre o tutor/a): ______________________ (____________)

Centro en el que estudias: ____

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar, debes copiar en el recuadro de cada una de las hojas el número que aparece en el recuadro superior derecho de esta hoja, comprobar y completar tus datos y corregirlos si están mal.

A continuación, debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes escribir también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos. Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.**

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además, tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

☐ Por tu colegio.

☐ Por la *Olimpiada Matemática*.

☐ Por el *Open Matemático*.

☐ Por otros medios. Indícalos: ....

Sabemos que la inmensa mayoría de los que participáis en esta prueba venís con mucha ilusión por participar en el programa ESTALMAT durante los sábados de los próximos dos años si os seleccionamos, pero nos preocupa que puedas participar sin interés, solo porque alguien te ha dicho que vengas. **Si deseas que no te seleccionemos,** puedes indicárnoslo marcando esta casilla: ☐ En caso de que marques esta casilla, **no te corregiremos la prueba** y **no te seleccionaremos.** Además, **no se lo diremos a nadie.**

Tienes dos horas y media de prueba en total. En la primera parte encontrarás 3 problemas y tendrás 1 h 30 min para resolverlos. En la segunda parte, encontrarás 2 problemas y tendrás 1 h para resolverlos.

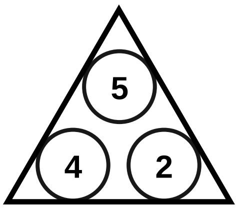
Te deseamos mucho éxito.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE ECONOMÍA, INDUSTRIA Y COMPETITIVIDAD
FECYT
FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

1. TRICÁLCULOS

En este problema sólo pueden utilizarse números naturales (1, 2, 3, 4, etc.). Sobre un triángulo como el del dibujo situamos tres números en los tres círculos. A continuación, realizamos la siguiente operación a la que llamamos el tricálculo de los tres números:

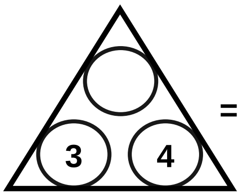
Nº de Abajo Izquierda x Nº de Abajo Derecha + Nº de Arriba



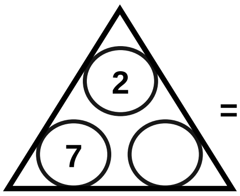
Por ejemplo, en el triángulo de la derecha, el tricálculo de los tres números vendrá dado por: **4 x 2 + 5 = 13.**

Responde las siguientes cuestiones:

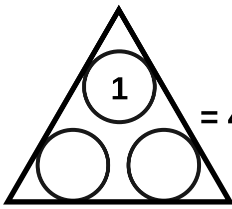
a) Completa los siguientes triángulos para que sus tricálculos sean los indicados:



= 20

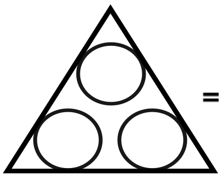


= 44



= 42

b) ¿Cuántos triángulos existen cuyo tricálculo da como resultado 6? Debes tener en cuenta que los números de los vértices pueden repetirse y que dos triángulos son diferentes si sus números están colocados en diferentes círculos, aunque sean los mismos números.



= 6

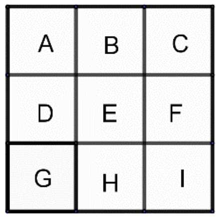
c) Recuerda que los cuadrados perfectos son los números que puedes expresar como el cuadrado de un número natural, es decir, son: 1, 4, 9, 16, etc. Si en los vértices de abajo ponemos dos números consecutivos (seguidos), ¿cuál es el número más pequeño que podemos poner en el vértice de arriba para conseguir un cuadrado perfecto como resultado del tricálculo? Explica por qué crees que no hay uno más pequeño.

(Continúa detrás)

d) Si en los números de abajo ponemos un número y su triple, ¿qué número podemos poner en el vértice de arriba para conseguir un cuadrado perfecto como resultado del tricálculo?

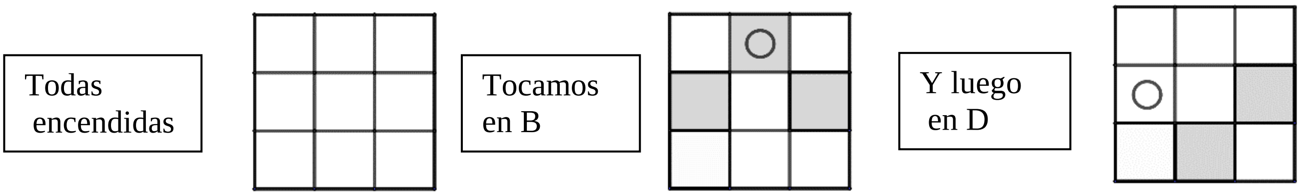
e) ¿Existen tres números **distintos** que al ponerlos en cualquier orden en el triángulo siempre dé como resultado el mismo tricálculo? Razona tu respuesta.

2. ILUMINACIÓN EN EL MUSEO CARRÉ

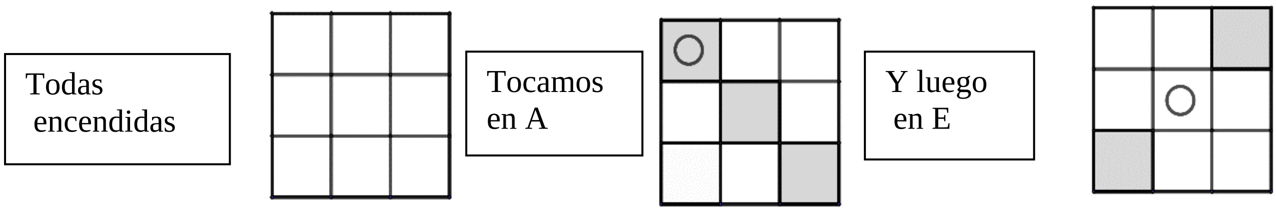


El museo Carré tiene forma de cuadrado y tiene 9 salas cuadradas iguales: A, B, C, D, E, F, G, H, I tal como se ve en el dibujo. En cada una de ellas hay un interruptor de la luz que enciende o apaga la luz de esa sala y de las que están en diagonal con ella.

Por ejemplo, si partimos con todas las salas iluminadas y tocamos el interruptor de B, se apagan las salas B, D y F. Si a continuación apretamos el interruptor de D, se encienden D y B que estaban apagadas y se apaga H que estaba encendida. Una forma de representar lo que ocurre con la secuencia de interruptores **B → D** es:



Con todas las salas iluminadas, si tocamos en A se apagan A, E e I. Si a continuación tocamos en E, se encienden A, E e I, y se apagan C y G. Así pues, la secuencia **A → E** es:



En todos los apartados del problema partimos de que todas las salas del museo comienzan estando iluminadas.

a) ¿Qué ocurre si tocamos el mismo interruptor dos veces seguidas? Razona tu respuesta.

b) Si tocamos dos interruptores distintos, ¿importa el orden en que lo hacemos? Razona tu respuesta.

c) Partiendo de todas las luces encendidas, escribe una secuencia de interruptores ordenada (lo más corta posible) para dejar apagadas todas las salas. (Puedes dejar cuadrados en blanco si no los necesitas, o añadir nuevos si te hacen falta).

□ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □

(Continúa detrás)

d) Partiendo de todas las luces encendidas, escribe una secuencia de interruptores ordenada (lo más corta posible) para dejar encendida solo la sala central E. (Puedes dejar cuadrados en blanco si no los necesitas, o añadir nuevos si te hacen falta).

□ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □

e) Indica, de manera razonada, las salas que pueden acabar estando ellas solas iluminadas y las otras apagadas.

CUADRADOS PARA PRACTICAR

3. BUZONES

Tenemos 4 buzones, dos rojos y dos negros, que están siempre fijos en la misma posición. Tenemos también dos tarjetas rojas y dos negras y las repartimos de manera que haya una tarjeta en cada buzón. Una forma posible de repartirlas es la siguiente:

Buzón rojo	Buzón rojo	Buzón negro	Buzón negro
Tarjeta roja	Tarjeta negra	Tarjeta negra	Tarjeta roja

En el reparto anterior, solo dos buzones contienen una tarjeta de igual color que el buzón.

Pensando en todas las maneras en que se pueden distribuir las tarjetas en los buzones, en total hay tres posibilidades:

1. Todos los buzones contienen una tarjeta de su color.
2. Sólo dos buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.
3. Ningún buzón contiene una tarjeta del mismo color que el buzón.

a) ¿Cuál de las tres posibilidades es la que ocurrirá más veces si repartimos las tarjetas al azar? ¿Por qué?

b) Ahora tenemos 6 buzones (3 rojos primero y 3 negros después) y también 3 tarjetas rojas y 3 negras que se reparten al azar en los buzones, una en cada buzón. En el caso anterior teníamos tres posibilidades para distribuir las tarjetas en los buzones teniendo en cuenta si las tarjetas coincidían o no con el color del buzón.

¿Podrías hacer un estudio similar al anterior en este caso, numerando todas las posibilidades que pueden ocurrir? ¿podrías comparar estas posibilidades para decidir cuáles ocurren más veces y cuáles menos?

(Continúa detrás)

c) Ahora tenemos 30 buzones (15 rojos primero y 15 negros después) y también 15 tarjetas rojas y 15 negras que se pueden repartir en los buzones, una en cada buzón. Haz un estudio similar al del apartado b). ¿podrías comparar todas las posibilidades para decidir cuáles ocurren más veces y cuáles menos?

d) En general, si tuviéramos un número par cualquiera de buzones, la mitad rojos y la mitad negros, con tantas tarjetas en total como buzones, pero sabiendo que hay más tarjetas rojas que negras, ¿puede ocurrir que el número de buzones con una tarjeta de su color sea un número impar? Justifica tu respuesta.

4. REGALO DE CANICAS

Diego y Marta suelen jugar a las canicas por las tardes. Como son muy amigos, deciden intercambiarlas de una forma especial:

- El primer día, el que tiene más canicas le regala una al otro.
- El segundo día, el que tiene más canicas le regala 2 de sus canicas al otro.
- El tercer día el que tiene más canicas le regala tres al otro, y así sucesivamente.

Continúan así todos los días, de forma que cada día, el que tiene más canicas, le regala canicas al otro, pero siempre se regala una más que el día anterior. Por ejemplo, si Marta tuviera 9 canicas y Diego 12, el primer día Marta se iría a casa con 10 y Diego con 11, el segundo día Marta tendría 12 (dos más) y Diego 9 (dos menos), el tercer día Marta tendría 9 (tres menos) y Diego 12 (tres más), …

a) Si inicialmente Marta tiene 5 canicas y Diego 6, ¿cuántas canicas tendrá cada uno al cabo de tres días? ¿Cuántos días van a pasar hasta que alguno de los dos se quede sin canicas?

b) Si Marta tuviera 50 canicas y Diego 51 canicas, ¿cuántos días pasarían hasta que alguno se quedara sin canicas? Explica tu razonamiento.

(Continúa detrás)

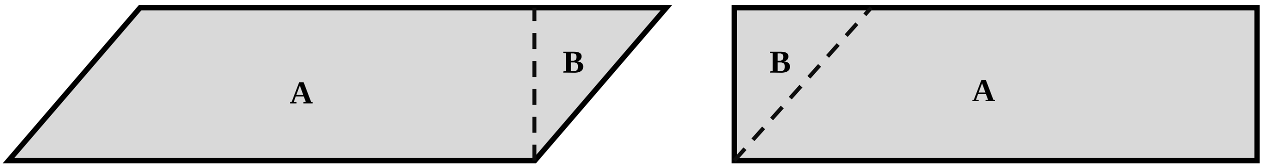
c) Da dos ejemplos distintos en los que Marta y Diego se queden con el mismo número de canicas. ¿Puede ocurrir eso justo después del primer día? ¿Y justo después del segundo día?

d) ¿Cuál debe ser la diferencia entre el número de canicas de uno y otra para que después del intercambio del día 20 queden ambos con el mismo número de canicas? Justifica tu respuesta.

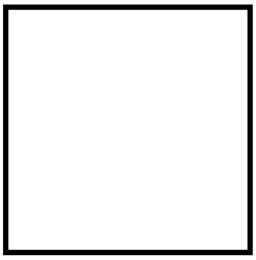
5. PARTIENDO POLÍGONOS

En el siguiente problema vamos a trabajar con polígonos. Podrás trocearlos (sólo en sentido figurado, ya que no está permitido el uso de tijeras en la prueba) en varias piezas para después poder recomponerlas todas y formar otros polígonos.

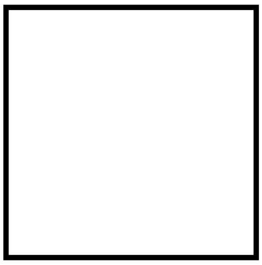
Por ejemplo, un paralelogramo podemos cortarlo en dos piezas y recomponer con ellas un rectángulo:



a) ¿Cuál es el menor número de trozos en que puedes cortar un cuadrado para recomponerlo después en un triángulo? Justifica la respuesta.

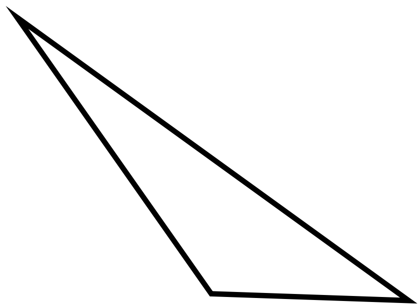


b) ¿Podrías partir un cuadrado en dos piezas para recomponerlas en un triángulo que no tenga ningún ángulo de 45 grados? Justifica la respuesta.

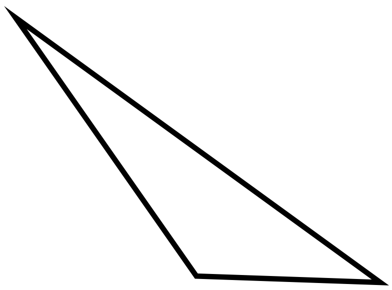


(Continúa detrás)

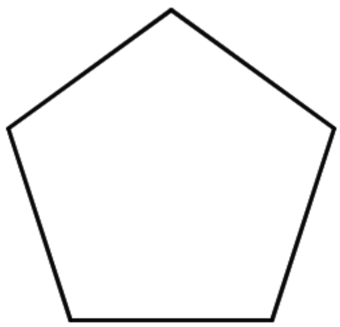
c) Recuerda que un triángulo escaleno es aquel que tiene tres lados de longitud distinta. ¿Podrías cortar un triángulo escaleno en el número de trozos que necesites para después recomponerlo en un cuadrilátero cualquiera (un polígono de cuatro lados)?



¿Y puedes conseguir que ese cuadrilátero sea un rectángulo?



d) ¿Cómo partirías un pentágono regular en trozos para recomponerlo después en un cuadrilátero (un polígono de cuatro lados)?



a) ¿Crees que podrías trocear un triángulo y recomponerlo en un polígono de 18 lados?